9. LA LÓGICA FORMAL

9.1 ¿Qué es la lógica formal?

9.2.Lógica proposicional o de enunciados

9.3. Tablas de verdad

9.1 ¿Qué es la lógica formal?

- **Lógica**: disciplina filosófica que estudia los razonamientos correctos. Fundada por Aristóteles s.IV a.C
- Todos los hombres son mortales. Sócrates es un hombre. Por tanto Sócrates es mortal.

Argumento o razonamiento: conjunto de enunciados mediante el cual se pretende probar o refutar una tesis.

Premisa: enunciado que apoya o da razón a una tesis.

Conclusión: tesis que se quiere probar o refutar.

- **Lógica formal**: es aquel tipo de lógica que estudia la estructura de los razonamientos prescindiendo de su contenido.
- Un razonamiento es correcto si es deductivo, es decir, que dadas las premisas se llega necesariamente a la conclusión.
- Ejemplo 1: Si Sara se salta el semáforo en rojo, a Sara le ponen una multa. A Sara le han puesto una multa. Por tanto Sara se ha saltado el semáforo en rojo.
- No es correcto porque no es deductivo.

- Ejemplo 2: Si un eucaliptus se salta el semáforo en rojo, al eucaliptus le ponen una multa. El eucaliptus se ha saltado el semáforo en rojo. Por tanto al eucaliptus le han puesto una multa.
- Es un razonamiento correcto porque es deductivo, aunque sus premisas y conclusión sean falsas.

- Un <u>razonamiento es sólido</u> si es correcto y además sus enunciados son verdaderos

VERDAD ≠ **VALIDEZ (O CORRECCIÓN)**

Ser verdadero o falso es una cualidad de los:

Enunciados

Que consiste en que expresen bien/adecuadamente la…

Realidad

Ser válido o no (correcto o incorrecto) es una cualidad de los:

Razonamientos

Que consiste en que en ellos haya una…

Conexión adecuada y necesaria entre enunciados

Que sean deductivos

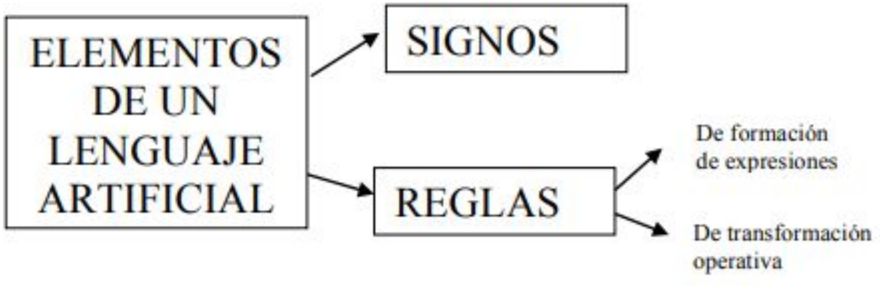
- La lógica formal surge a finales del s.XIX para superar a través de un lenguaje artificial y formal las carencias del lenguaje natural.

- Lenguaje natural (castellano, inglés, francés,..)
- Ambigüedades: polisemia
- Paradojas

Todo lo que está escrito dentro de un rectángulo es mentira

Página 164

Elementos de un lenguaje artificial



¿El razonamiento es correcto?

El Real Madrid gana y no pierde el Sevilla; pierde el Sevilla o no pierde el Atlético de Madrid; si gana el Barcelona entonces pierde el Atlético de Madrid. Luego no gana el Barcelona y el Real Madrid gana.

9.2.Lógica proposicional

- **Lógica proposicional**: es aquella lógica formal que estudia los enunciados o proposiciones sin analizar .
- **Enunciado o proposición**: es una oración en que se afirma o niega algo y, por tanto, es verdadera o falsa.
- ¿Cuáles son enunciados?

1. Todas las plantas son seres vivos.
2. ¿Hoy es martes?
3. ¡Ojalá llueva!

- *Proposición atómica o simple*: aquella proposición simple que no se puede descomponer.

(variables proposicionales: p,q,r,s,t…)

p=Todas las plantas son seres vivos

- *Proposición molecular o compleja*: aquella proposición compleja que puede descomponerse en proposiciones simples. “Todas las plantas son seres vivos y los minerales no son seres vivos”
- p=Todas las plantas son seres vivos
- q= Los minerales no son seres vivos
- p ^ q

Formalización de enunciados

- Página 166-168 el lenguaje formal consta de
- Variables proposicionales: p, q, r, s, t,..
- Conectivas: negador, conjuntor, disyuntor, condicional y bicondicional.

NOTA: Sobre esto último pueden establecerse las siguientes normas de carácter general:

$\leftrightarrow$ es dominante en cualquier fórmula.
$\rightarrow$ domina a $\wedge$ $\vee$.
$\wedge$ $\vee$ tienen la misma fuerza.

$\neg$ puede dominar a todos los demás conectores.

- Símbolos auxiliares: paréntesis.

- Formalizar consiste en pasar del lenguaje natural al lenguaje formal:
- Ejemplo: Si Julia está en la biblioteca entonces está corrigiendo exámenes o leyendo un libro.

TABLA DE CORRESPONDENCIAS PARA LA FORMALIZACIÓN DE ENUNCIADOS

Lenguaje natural		Lenguaje de la lógica proposicional	
Términos categoremáticos	La lógica es una ciencia formal. El agua hierve a 100 °C. Toda cultura tiene tabúes. Los tabúes son un universal cultural. Hume fue un gran empirista.	p, q, r, s, t, u, … (cada enunciado se representa con una variable proposicional diferente)	Variables proposicionales
Términos sincategoremáticos	no / ninguno / nunca / …	$\neg$	Conectivas
	y / también / además / …	$\wedge$	
	o / pero / sin embargo / …	$\vee$	
	Si…, entonces ___ / cuando…, ___	$\rightarrow$	
	___, si y solo si… / ___ equivale a …	$\leftrightarrow$	
Signos de puntuación	. / , / ; / :	( )	Símbolos auxiliares

Por ejemplo, al formalizar la expresión La lógica es una ciencia formal y Hume fue un gran empirista, obtendremos $p \wedge q$.

p = La lógica es una ciencia formal

q = Hume fue un gran empirista

Formalización: $p \wedge q$.

Si la expresión que queremos formalizar es Si toda cultura tiene tabúes, entonces los tabúes son un universal cultural, la expresión lógica que obtendremos será $r \rightarrow s$.

r = Toda cultura tiene tabúes

s = Los tabúes son un universal cultural

Formalización: $r \rightarrow s$.

Finalmente, si decimos Lo haré si y solo si estás dispuesto a acompañarme y obedecerme en todo cuanto te diga.

p = Yo lo haré

q = Tú estás dispuesto a acompañarme

r = Tú estás dispuesto a obedecerme en todo cuanto te diga

Formalización: $p \leftrightarrow (q \wedge r)$.

Lee las siguientes oraciones y contesta:

-¿Cuáles son enunciados?

- ¿Cuáles son enunciados atómicos y moleculares?

-Formaliza los que sean enunciados

a)Vamos al cine

b) Si la virtud es ciencia, entonces se puede enseñar.

c) La comida está caliente pero es exquisita

d) ¡ Ójala me toque el euromillón!

e) Si te gusta el último disco de Amaral, o te compras el CD o lo pides prestado.

f) Luis cogerá el coche y se irá al campo si y solo si viene Ana con su coche, entonces no viene Carlos.

g) ¿Me prestas tu libro?

h) Si me voy al cine o me voy a la playa, entonces las jirafas tienen el cuello corto.

9.3.Tablas de verdad

Tablas de verdad de proposiciones moleculares básicas

Tipo de proposición	Tabla de verdad	Regla mnemotécnica
Negación	p / ¬p: V F; F V	El valor de verdad de una negación es siempre el contrario al del enunciado sin negador.
Conjunción	p / q / p ∧ q: V V V; V F F; F V F; F F F	Una conjunción será verdadera solo si ambos miembros son verdaderos.
Disyunción	p / q / p ∨ q: V V V; V F V; F V V; F F F	Una disyunción será falsa solo cuando sus dos miembros sean falsos.
Condicional	p / q / p → q: V V V; V F F; F V V; F F V	Un condicional es falso solo en el caso de que su antecedente sea verdadero y su consecuente, falso.
Bicondicional	p / q / p ↔ q: V V V; V F F; F V F; F F V	Un bicondicional es verdadero siempre que sus dos miembros tengan idéntico valor de verdad.

Negación

p	¬p
V	F
F	V

Conjunción

p	q	p ∧ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disyunción

p	q	p ∨ q
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Condicional

p	q	p → q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Bicondicional

p	q	p ↔ q
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Primer ejemplo. Veamos, a modo de ejemplo, cómo se opera para hallar la tabla de verdad de la fórmula $(p \rightarrow q) \wedge p$ (obsérvese que el conector dominante es $\wedge$).

1) Comenzaremos por *dar valores de verdad a las proposiciones atómicas* que intervienen (p, q). Obtendremos:

p	q
1	1
1	0
0	1
0	0

2) A continuación *se resuelve la fórmula en que no está el conector dominante*, es decir, la fórmula $p \rightarrow q$. Para ello aplicaremos la tabla del condicional y obtendremos:

p	q	$p \rightarrow q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

3) Por último, trataremos de *hallar la tabla de verdad de la fórmula total:* $(p \rightarrow q) \wedge p$. Téngase en cuenta que se trata de una conjunción cuyos elementos son $(p \rightarrow q)$ y p. Los valores de verdad de $(p \rightarrow q)$ y de p han sido hallados ya en el paso anterior. Por tanto, aplicaremos a los mismos las tablas de la conjunción.

(Obsérvese que en este último paso no hay necesidad ninguna de atender a q. Por ello, nos permitimos dejar la columna de q en caracteres normales, mientras que las tres restantes aparecen en negrita.)

El resultado final es el siguiente:

p	q	$\mathbf{p \rightarrow q}$	$\mathbf{(p \rightarrow q) \wedge p}$
1	1	**1**	**1**
1	0	**0**	**0**
0	1	**1**	**0**
0	0	**1**	**0**

Clasificación de las proposiciones según su tabla de verdad :

- <u>Indeterminación</u>: Una proposición que puede ser verdadera o falsa.
- <u>Tautología</u>: una proposición que es siempre verdadera.
- <u>Contradicción:</u> una proposición que es siempre falsa.

Indeterminación

Expresión: No existe el lenguaje perfecto y los lenguajes naturales son muy versátiles.

p = Existe el lenguaje perfecto

q = Los lenguajes naturales son muy versátiles

Formalización: $\neg p \land q$

Tabla de verdad			
p	**q**	**¬p**	**¬p ∧ q**
V	V	F	F
V	F	F	F
F	V	V	V
F	F	V	F

Análisis semántico: indeterminación.

Explicación: en la columna correspondiente al enunciado molecular cuya tabla de verdad se ha realizado aparecen tanto «V» como «F».

Tautología

Expresión: *Si tu hermana está en el salón o está en el jardín, entonces tu hermana está en el jardín o está en el salón.*

p = Tu hermana está en el salón

q = Tu hermana está en el jardín

Formalización: $(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)$

Tabla de verdad				
p	**q**	$\mathbf{p \vee q}$	$\mathbf{q \vee p}$	$\mathbf{(p \vee q) \rightarrow (q \vee p)}$
V	V	V	V	V
V	F	V	V	V
F	V	V	V	V
F	F	F	F	V

Análisis semántico: *tautología.*

Explicación: *en la columna correspondiente al enunciado molecular cuya tabla de verdad se ha realizado aparece únicamente el valor V.*

Contradicción

Expresión: *Eres inteligente y eres simpático si y solo si o bien no eres inteligente o bien no eres simpático.*

p = Eres inteligente

q = Eres simpático

Formalización: $(p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q)$

Tabla de verdad						
p	**q**	**¬p**	**¬q**	**p ∧ q**	**¬p ∨ ¬q**	**(p ∧ q) ↔ (¬p ∨ ¬q)**
V	V	F	F	V	F	F
V	F	F	V	F	V	F
F	V	V	F	F	V	F
F	F	V	V	F	V	F

Análisis semántico: *contradicción.*

Explicación: *en la columna correspondiente al enunciado molecular cuya tabla de verdad se ha realizado aparecen únicamente el valor «F».*

Cómo se otorgan valores de verdad a las variables proposicionales

Dos variables
(p, q)

p	q
	1
	0
	1
	0

Tres variables
(p, q, r)

p	q	r
		1
		0
		1
		0
		1
		0
		1
		0

Cuatro variables
(p, q, r, s)

p	q	r	s
			1
			0
			1
			0
			1
			0
			1
			0
			1
			0
			1
			0
			1
			0
			1
			0

2) Asígnense a continuación valores de verdad a la variable de la columna precedente, alternando dos unos y dos ceros hasta el total correspondiente:

Dos variables
(p, q)

p	q
1	1
1	0
0	1
0	0

Tres variables
(p, q, r)

p	q	r
	1	1
	1	0
	0	1
	0	0
	1	1
	1	0
	0	1
	0	0

Cuatro variables
(p, q, r, s)

p	q	r	s
		1	1
		1	0
		0	1
		0	0
		1	1
		1	0
		0	1
		0	0
		1	1
		1	0
		0	1
		0	0
		1	1
		1	0
		0	1
		0	0

3) Pásese a la columna precedente, alternando ahora cuatro unos y cuatro ceros hasta el total que corresponda:

Tres variables
(p, q, r)

p	q	r
1	1	1
1	1	0
1	0	1
1	0	0
0	1	1
0	1	0
0	0	1
0	0	0

Cuatro variables
(p, q, r, s)

p	q	r	s
	1	1	1
	1	1	0
	1	0	1
	1	0	0
	0	1	1
	0	1	0
	0	0	1
	0	0	0
	1	1	1
	1	1	0
	1	0	1
	1	0	0
	0	1	1
	0	1	0
	0	0	1
	0	0	0

4) Continúese con la columna precedente, alternando en esta ocasión ocho unos y ocho ceros hasta el total correspondiente:

Cuatro variables
(p, q, r, s)

p	q	r	s
1	1	1	1
1	1	1	0
1	1	0	1
1	1	0	0
1	0	1	1
1	0	1	0
1	0	0	1
1	0	0	0
0	1	1	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	1	0	0
0	0	1	1
0	0	1	0
0	0	0	1
0	0	0	0

Resolución de razonamientos utilizando tablas de verdad.

• Paso 1: Transformar el razonamiento a un único enunciado molecular:

Todo razonamiento equivale a una fórmula condicional cuyo antecedente está formado por la conjunción de las premisas y cuyo consecuente es la conclusión.

Ejemplo: Si llueve me mojo. Está lloviendo. Por tanto me mojo

1. $p \rightarrow q$
2. p

q

Transformación

$[(p \rightarrow q) \wedge p] \rightarrow q$

- Paso 2: realizar la tabla de verdad y comprobar si la fórmula es tautológica.

Porque un razonamiento es correcto cuando la fórmula formada por las premisas y la conclusión es una **tautología.**

Ejemplo: Si llueve, iremos a bailar. Si vamos a bailar entonces ligaré con alguien. Por lo tanto si llueve ligaré con alguien.

p:Llueve.

q:Iremos a bailar.

r: Ligar con alguien.

- *Deberes:* Comprueba, realizando una tabla de verdad, si el siguiente razonamiento es correcto

  O llueve o hoy es martes. Hoy es martes. Si no llueve entonces iremos al campo. Luego no iremos al campo.

p:Llueve

q:Hoy es martes.

r:Iremos al campo.

- Indica si los siguientes razonamientos son válidos utilizando las tablas de verdad.

a) O es de día o es de noche. Si es de día, entonces vamos al parque. Si es de noche, entonces vamos al cine. Por tanto o vamos al cine o vamos al parque.

b) El perro salta y el león ruge. Luego no es el caso que el perro no salta o el león no ruge.

c) Si te quiero mucho, entonces debemos salir juntos. Aunque te quiero mucho no soporto a tus amigos. Por tanto debemos salir juntos.

- a) 1. $p \vee q$

  2. $p \rightarrow r$

  3. $q \rightarrow s$

  $r \vee s$

Transformación en una fórmula condicional:

$[(p \vee q) \wedge (p \rightarrow r) \wedge (q \rightarrow s)] \rightarrow (r \vee s)$

p	q	r	s	p v q	p→r	q→s	r v s	(p v q) ^ (p→r)	() ^() ^(q→s)	[ ] → (r v s)
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1
1	1	0	1	1	0	1	1	0	0	1
1	1	0	0	1	0	0	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1	0	0	1
1	0	0	0	1	0	1	0	0	0	1
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	0	1	1	0	1
0	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1
0	1	0	0	1	1	0	0	1	0	1
0	0	1	1	0	1	1	1	0	0	1
0	0	1	0	0	1	1	1	0	0	1
0	0	0	1	0	1	1	1	0	0	1
0	0	0	0	0	1	1	0	0	0	1